Возможные решения

9 класс

Задача 1. Экстремальная гонка

Графическое решение. Время движения болида $t_0 = L/v_{\text{ср}}$, где L — длина участка. На графике $v(t)$ возможные способы движения болида представляются прямыми с разными наклонами (ускорениями), причём, площадь под графиком (длина пути) одинакова (рис. 12).

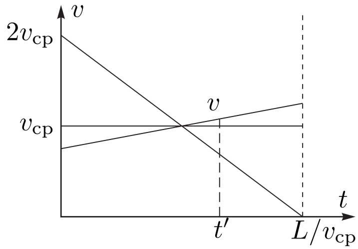

Рис. 12

Обозначим момент времени при котором болид находится в середине пути t'. На графике это время расположено так, что площади под графиком слева и справа от него равны. Заметим, что при увеличении по модулю ускорения a значение t' сдвигается в сторону больших скоростей, и скорость в середине пути v увеличивается.

Наименьшая скорость $v_{\min}$ достигается при $a = 0$ и равна средней скорости $v_{\text{ср}}$, а максимальная $v_{\max}$ будет достигнута при движении с максимальным ускорением и нулевой начальной (или конечной) скоростью. Конечная скорость при таком движении $v_{\text{к}} = 2v_{\text{ср}}$. Длина контрольного участка равна:

$$L = \frac{v_{\text{к}}^2}{2a},$$

половина пути:

$$\frac{L}{2} = \frac{v_{\max}^2}{2a}.$$

Отсюда следует, что максимальная скорость в середине участка равна $v_{\max} = v_{\text{к}}/\sqrt{2} = \sqrt{2}v_{\text{ср}}$.

Аналитическое решение. Пусть начальная скорость болида v_0, а ускорение при движении равно a. Тогда длина контрольного участка трассы

$$L = \frac{v_{\text{к}}^2 - v_0^2}{2a}, \tag{1}$$

половина пути:

$$\frac{L}{2} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получим выражение для скорости в середине трассы:

$$v^2 = \frac{v_{\text{к}}^2 + v_0^2}{2}.$$

Так как движение равноускоренное, то средняя скорость $v_{ср}$ выражается через $v_к$ и v_0 следующим образом:

$$v_{ср} = \frac{L}{t} = \frac{v_0 t + at^2/2}{t} = v_0 + \frac{v_к - v_0}{2} = \frac{v_0 + v_к}{2}.$$

Начальная и конечная скорости неотрицательны, поэтому для начальной скорости верно условие $0 < v_0 < 2v_{ср}$.

Выразим скорость в середине пути v через v_0 и $v_{ср}$:

$$v^2 = 2v_{ср}^2 - 2v_0 v_{ср} + v_0^2 = (v_{ср} - v_0)^2 + v_{ср}^2.$$

Минимальная скорость $v_{\min}$ достигается при $v_0 = v_{ср}$ и равна $v_{ср}$. Максимальная скорость $v_{\max}$ достигается при $v_0 = 0$ или $v_0 = 2v_{ср}$ и равна $\sqrt{2}v_{ср}$.

Задача 2. На балконе

Скорость изменения кинетической энергии тела — это мощность приложенных к нему сил. На шарик действуют сила тяжести и сила сопротивления воздуха. По условию, сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$\vec{F}_с = -\alpha \vec{v}.$$

Суммарная мощность сил, приложенных к шарику:

$$N = (m\vec{g} + \vec{F}_с) \cdot \vec{v} = mgv - \alpha v^2, \tag{3}$$

где v — проекция скорости шарика $\vec{v}$ на ось, направленную вертикально вниз.

При падении шарик будет ускоряться, пока сила сопротивления не уравновесит силу тяжести. Зная скорость установившегося движения v_2, найдём коэффициент α, записав для шарика второй закон Ньютона в проекции на ось, направленную вертикально вниз, и приравняв ускорение к 0:

$$0 = mg - \alpha v_2, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{mg}{v_2}.$$

В процессе движения v меняется от $-v_0$ до v_2.

Выражение для мощности (3) можно привести к виду:

$$N = \frac{(mg)^2}{4\alpha} - \alpha \left(v - \frac{mg}{2\alpha}\right)^2.$$

График этой зависимости — парабола с вершиной $v_1 = mg/(2\alpha)$, показаная на рисунке 13.

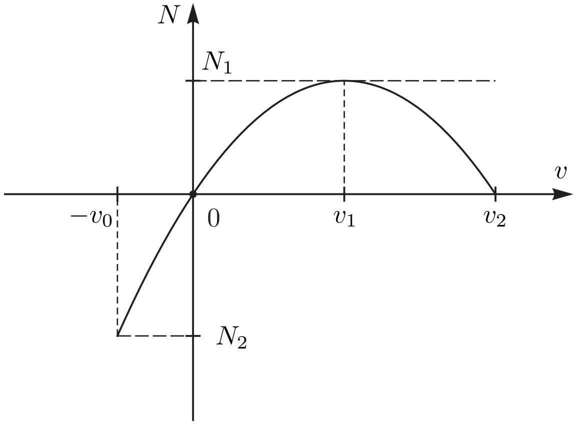

Рис. 13

Как видно из графика, максимальная (по модулю) скорость изменения кинетической энергии достигается либо при $v = v_1$, либо при $v = -v_0$. В первом случае, мощность $N_1 = \dfrac{(mg)^2}{4\alpha}$, во втором $N_2 = \dfrac{(mg)^2}{4\alpha} - \alpha\left(v_0 + \dfrac{mg}{2\alpha}\right)^2$. Сравнив N_1 и N_2 найдём, что при $v_0 < v_{\text{к}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)mg}{2\alpha}$ $N_1 > N_2$ и, следовательно, $v_{\max} = v_1$; при $v_0 > v_{\text{к}}$ $N_2 > N_1$ и $v_{\max} = v_0$; при $v_0 = v_{\text{к}}$ верны оба ответа.

Задача 3. Подводные работы

Чтобы вычислить изменение объёма воздуха в колоколе, воспользуемся законом Бойля-Мариотта: $pV = (p + \Delta p)(V - \Delta V)$. Из него следует, что объём воздуха уменьшится на:

$$\Delta V = V\left(\frac{\Delta p}{p + \Delta p}\right) = 0{,}0133 \text{ м}^3.$$

Рассмотрим равновесие системы «колокол + груз + столб воды внутри колокола». На систему действуют следующие внешние силы: силы тяжести, сила натяжения троса F_1 и силы гидростатического давления на верхнюю и нижнюю поверхность системы (не все силы показаны на рисунке 14). После поднятия груза объём воздуха уменьшится, освобождённый объём ΔV займет вода массой $\rho\Delta V$. При этом из всех внешних сил, действующих на систему, изменятся только сила натяжения троса и сила тяжести, действующая на воду внутри колокола. Таким образом, сила натяжения троса уменьшится на

$$\Delta F = \rho \Delta V g = 133 \text{ Н}.$$

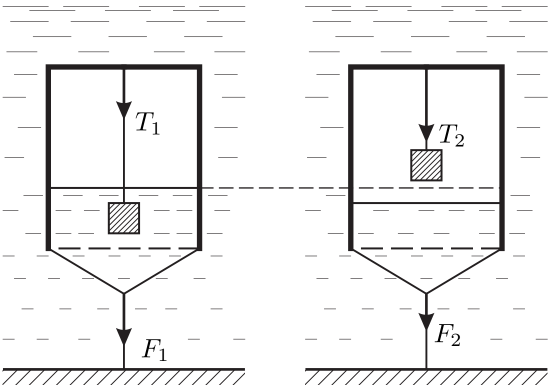

Рис. 14

На колокол действуют сила тяжести, сила гидростатического давления, сила давления воздуха и силы натяжений троса и верёвки. Из них при поднятии груза изменяются силы натяжений и сила давления воздуха. Силы натяжения направлены вниз, сила давления воздуха — вверх. Давление увеличивается, сила натяжения троса уменьшается, значит, сила натяжения верёвки увеличивается, причём:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \Delta p S + \Delta F = 1000\ \text{Н} + 133\ \text{Н} = 1133\ \text{Н}.$$

Задача 4. Сосулька на нити

Пусть в некоторый момент температура шарика равна t, а глубина канала h. Запишем уравнение теплового баланса:

$$C(t_1 - t) = \lambda m = \lambda \rho S h. \tag{4}$$

Здесь m — масса растопленного льда. Из записанного уравнения можно найти начальную температуру шарика:

$$t_1 = t_0 + \frac{SH\rho\lambda}{C} = 100^\circ\text{C}.$$

Мощность теплопередачи пропорциональна разности температур между шариком и льдом. С другой стороны, скорость опускания сосульки тоже связана с мощностью отводимого от шарика тепла

$$\lambda \rho S v = \alpha (t - t_0), \tag{5}$$

где α — постоянный размерный коэффициент. Из уравнения (4) выразим температуру t и подставим её в формулу (5):

$$\lambda \rho S v = \alpha \left(t_1 - \frac{\lambda \rho S h}{C} - t_0 \right), \quad \text{откуда} \quad v = \alpha \left(\frac{t_1 - t_0}{\lambda \rho S} + \frac{h}{C} \right),$$

то есть скорость сосульки линейно зависит от расстояния, на которое она опустилась (рис. 15).

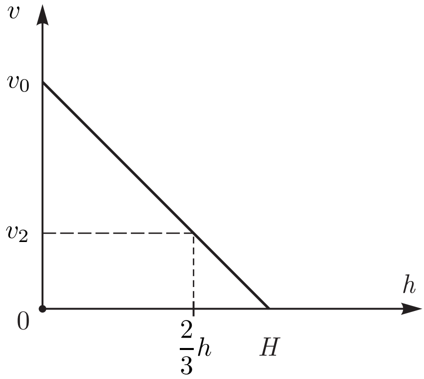

Рис. 15

Тогда вначале эксперимента скорость сосульки $v_0 = 3v_2 = 0{,}3$ мм/с.

Задача 5. Источник с компьютером

1) Чтобы получить зависимость протекшего через источник заряда от времени, воспользуемся предложенным определением среднего тока:

$$I_{\text{ср}} = \frac{q}{t} \Rightarrow q = I_{\text{ср}}t$$

Заряд, протекший через источник за время t, численно равен площади прямоугольника $q = I_{\text{ср}}t$. Найдя прошедший заряд для нескольких ($>$15) точек, построим зависимость $q(t)$ (рис. 16).

2) Поскольку участок OA – линейный, то силу тока в момент времени t_{A} можно найти и из следующих соображений:

$$I_{\text{ср}} = \frac{q}{t} = \alpha t \rightarrow q = \alpha t^2$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \alpha \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} \approx \alpha \frac{2t\Delta t}{\Delta t} = 2\alpha t = 2I_{\text{ср}}t$$

Для точки A: $I_A = 2t_A \cdot I_{\text{ср}}(t_A) = 6$ мА

Сопротивление резистора R найдем из закона Джоуля-Ленца:

$$R = \frac{N_A}{I_A^2} = 4{,}44 \text{ кОм}$$

3) Максимальной силе тока соответствует точка B с наибольшим угловым коэффициентом на графике $q(t)$ (здесь - точка перегиба).

$$t_B = 3 \text{ с} \qquad I_{max} = 8{,}25 \text{ мА}$$

Вновь воспользуемся законом Джоуля-Ленца:

$$N_{max} = RI_{max}^2 = 0{,}3025\ \text{Вт}$$

Заметим, что максимальная сила тока и максимальная **средная** сила тока достигаются не одновременно.

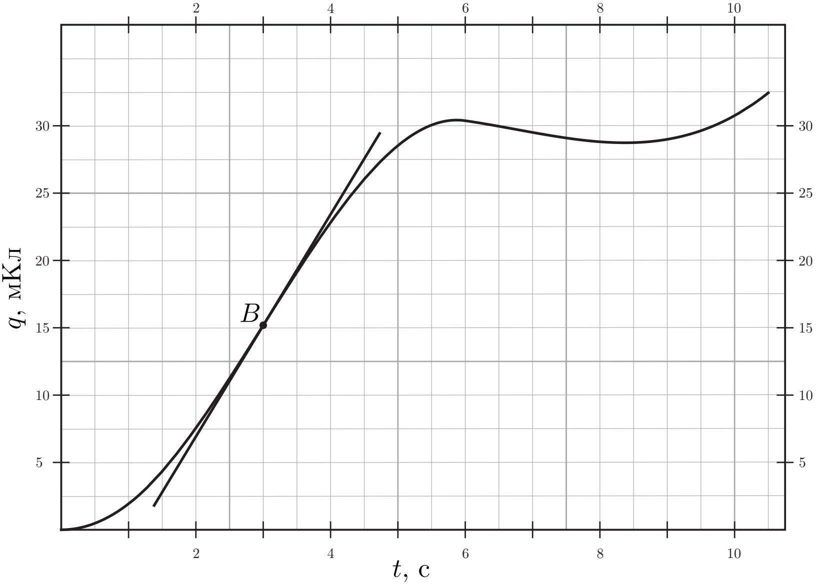

Рис. 16